

Penyelesaian Masalah Data Ketakpastian Menggunakan Splin-*B* Kabur (Solving Problems of Uncertain Data using Fuzzy *B*-Spline)

ABD. FATAH WAHAB*, JAMALUDIN MD. ALI,
AHMAD ABD. MAJID & ABU OSMAN MD. TAP

ABSTRAK

*Pembinaan model geometri berbantuan komputer (CAGD) dengan titik data yang mempunyai ketakpastian adalah sukar dan mencabar. Dalam kertas ini, pembinaan model splin-*B* kabur sebagai perwakilan matematik bagi lengkung dengan data ketakpastian menggunakan titik kawalan kabur dan titik kawalan penyahkaburan dibincangkan. Lengkung splin-*B* kabur atau splin-*B* penyahkaburan kubik untuk masalah data ketakpastian akan diperihalkan dengan menggunakan kaedah penghampiran splin-*B* kubik yang ditakrif menerusi titik kawalan kabur dan titik kawalan penyahkaburan. Bagi menyelesaikan masalah mengenai titik data ketakpastian pula, kaedah pengkaburan dan penyahkaburan titik data berkomponen kabur (penyahkaburan) beserta modelnya diperkenalkan. Bagi menguji tahap keberkesanan model, beberapa contoh lengkung simulasi data tersebut juga dibincangkan.*

*Kata kunci: Data ketakpastian; penyahkaburan; splin-*B* kabur; titik kawalan kabur*

ABSTRACT

*The construction of a geometric model in Computer Aided Geometrical Design (CAGD) with uncertain data points are difficult and challenging. In this paper, the construction of a fuzzy *B*-spline model as a mathematical representation for the curve of uncertain data using fuzzy control points and defuzzified control points is discussed. Cubic fuzzy *B*-spline or defuzzified *B*-spline curve for uncertainty data problems will be described using the cubic fuzzy *B*-spline approximation methods which are defined through fuzzy and defuzzification control points. For solving uncertain data, a method of fuzzification and defuzzification of component fuzzy (defuzzify) data point together with their model was introduced. For testing the effectiveness of the model, several examples of curve simulation of the given data are also discussed.*

*Keywords: Defuzzification; fuzzy *B*-Spline; fuzzy control points; uncertain data*

PENGENALAN

Dengan takrif set kabur (Zadeh 1965) titik kawalan kabur telah diperkenalkan dan model Bezier kabur berserta sifatnya telah dibangunkan (Abd. Fatah et al. 2004). Terdapat dua faktor utama yang disifatkan sebagai kelemahan yang terdapat pada model Bezier kabur. Pertama, jika n adalah jumlah bilangan titik kawalan kabur yang digunakan dalam model Bezier kabur, darjah polinomial yang tertinggi dalam fungsi adunan Bernstein rangup adalah berdarjah $(n+1)$. Ini bermakna, darjah polinomial yang tinggi diperlukan jika jumlah bilangan titik kawalan kabur yang banyak digunakan dan ini akan menjana beberapa masalah tertentu dalam reka bentuk geometri. Kedua, oleh sebab sifat semulajadi fungsi asas Bezier kabur, maka terdapat beberapa kekurangan pada model tersebut seperti modelnya tak mempunyai sifat kawalan secara setempat, lengkung dan permukaan keseluruhannya berubah apabila satu titik kawalan kabur diubah kedudukannya. Sedangkan sifat kawalan ini setempat sangat diperlukan dalam pemodelan geometri. Oleh sebab sifat perubahan ini, maka fungsi bagi model

Bezier kabur adalah terbatas dan tak sesuai digunakan untuk mereka bentuk model geometri yang kompleks (Jamaludin & Abd. Fatah 2005; Abd. Fatah et al. 2004; 2007). Untuk membolehkan model Bezier kabur berfungsi seperti yang dibincang, kita memperluaskan model kabur tersebut dengan melibatkan konsep tambahan yang dikenali sebagai *vektor knot rangup* dan *knot kabur* ke dalam model asal Bezier kabur dan fungsi asasnya ditukar kepada fungsi asas splin yang baru. Dengan yang demikian, nilai knot dan fungsi asas yang baru ini akan dapat mengawal perubahan yang berlaku di dalam lengkung atau permukaan dalam poligonnya akibat daripada perubahan pada suatu titik kawalan kabur. Hubungan antara bilangan nilai knot dengan titik kawalan kabur pula akan menentukan peringkat dan darjah bagi suatu lengkung atau permukaan yang dijana. Ini akan memberi sedikit kebebasan kepada pereka bentuk dalam menentukan variasi lengkung dan permukaan yang dihasilkan. Lanjutannya, model yang terhasil dengan syarat-syarat tambahan itu dikenali sebagai *splin-*B* kabur* dan *splin-*B* penyahkaburan* yang akan diberikan dalam kertas ini. Tentang masalah penyesuaian data ketakpastian

melalui model kabur yang dihasilkan, *teknik pengkaburan data* menggunakan prinsip titik kawalan kabur akan dibincangkan. Data kabur yang dihasilkan melalui pendekatan ini akan disesuaikan dengan model splin-B kabur yang dibina. Oleh sebab tabii data ketakpastian strukturnya adalah kompleks, kaedah pengkaburan data kabur lengkap akan diperkenalkan. Contoh-contoh berangka laksanaan model kabur juga diberikan dalam bentuk lengkung dan permukaan.

Kajian mengenai perwakilan data ke dalam suatu bentuk lengkung atau permukaan menerusi teori set kabur ada dibincangkan. Jaccas et al. (1997) telah membincang beberapa model yang berasaskan sistem set kabur untuk *CAGD*. Menerusi mantik kabur, Castro (1995) menggunakan sistem mantik kabur dan hukum JIKA dan MAKA, penghampiran lengkung dan permukaan Bezier telah dibincangkan. Bagi nombor kabur dalam bentuk linguistik, Jaccas & Recasens (1993) telah menggunakannya sebagai pemboleh ubah dalam sistem pemodelannya. Anile et al. (2000) telah membincangkan masalah pemodelan data dalam sistem maklumat geografi atau “GIS” menggunakan splin asas kabur melalui kaedah penghampiran. Splin-B rangup dan selang splin-B diitlakkan secara langsung menggunakan aritmetik kabur dalam pembentukan permukaan. Data ketakpastian disukat menggunakan prinsip nombor kabur dan jumlahnya dikurangkan dengan mengabaikan sebahagian data yang tidak berkaitan. Data bermatra satu dan dua telah diuji tahap keberkesanan modelnya. Gallo & Spinello (2000) menggunakan model splin asas yang diperkenalkan Anile et al. (2000) dalam menyelesaikan masalah yang serupa. Data kabur diturunkan ke dalam bentuk data sel, maka dengan nombor kabur, aritmetik kabur dan prinsip perluasan (Anile et al. 1995), penghampiran permukaan splin kabur telah memberikan hasil yang memuaskan. Data asli Mount Etna digunakan bagi ujian penghampiran dan pelaksanaan model kaburnya.

PRELIMINARI

Takrif 1: Misalkan X adalah set semesta dan $A \subset X$. Set A dikatakan *set kabur* jika untuk setiap unsur $x \in X$ wujud suatu bentuk fungsi $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ yang mencirikan gred keahliaan bagi setiap unsur A dalam X yang ditakrif sebagai:

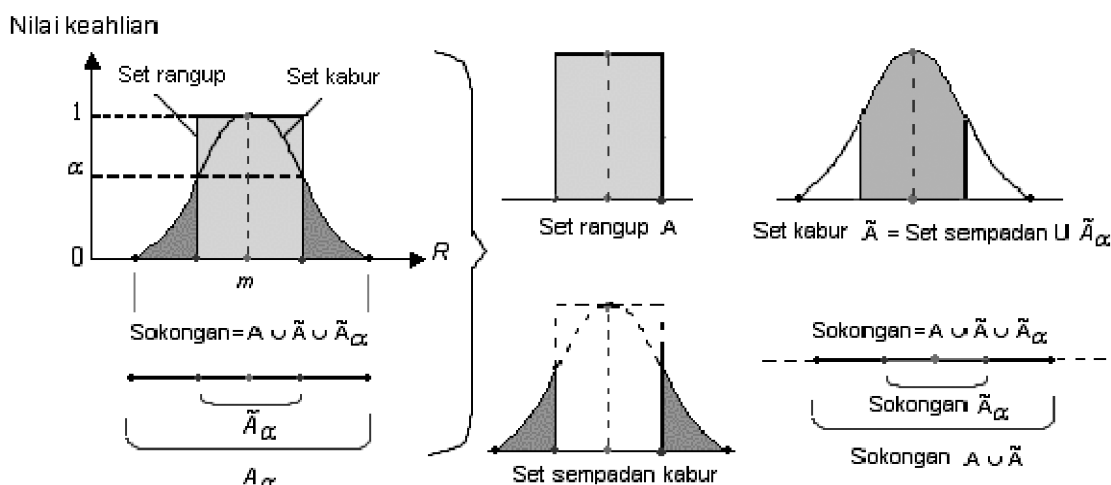
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in A \text{ (keahliaan penuh)} \\ c \in (0,1) & \text{jika } x \in \tilde{A} \text{ (keahliaan penuh).} \\ 0 & \text{jika } x \notin A \text{ (bukan keahliaan)} \end{cases} \quad (1)$$

Jadi, set kabur A dalam X merupakan set pasangan tertib unsur generik x dalam X dengan gred keahliaan $\mu_A(x)$ dalam $[0,1]$ yang ditandai dengan \tilde{A} dan ditulis sebagai $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x))\}$. Jika $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adalah set terhingga dan $A \subseteq X$ maka set kabur $\tilde{A} = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))\} \subseteq X \times [0, 1]$ (Zadeh 1965).

Takrif 2: Misalkan nombor nyata R adalah set semesta dan $P \subset R$ Set kabur \tilde{P} dalam R (nombor di sekitar P dalam R) dinamakan *nombor kabur normal*, jika \tilde{P} adalah cembung $x_o \in P$ yang unik dengan $\mu_p(x_o) = 1$, fungsi keahliaan $\mu_p(x)$ adalah selang cebis-demi-cebis, untuk sebarang $\alpha \in (0,1]$, set $P_\alpha = \{x : \mu_p(x) \geq \alpha\}$ merupakan selang tertutup yang boleh ditandai dengan $\langle P_\alpha^-, P_\alpha^+, P_\alpha^+ \rangle$ yang dengan $\mu_p(x) = 1$. Struktur nombor kabur ditunjukkan dalam Rajah 1.

Takrif 3: Set $\tilde{P} = \{\tilde{P}_i\}$ dalam suatu ruang $\psi(\tilde{P}_i)$ dikatakan *data ketakpastian* (data kabur) jika untuk setiap \tilde{P}_i dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$, gred keahliannya ditakrif oleh fungsi:

$$\mu_r(P_i) = \begin{cases} f(P_i) = \alpha \in (0,1) & \text{untuk } P_i \in [a,b), & (f \text{ menokok}) \\ 1 & \text{untuk } P_i \in [b,c), & (\text{di puncak}) \\ g(P_i) = \beta \in (0,1) & \text{untuk } P_i \in [c,d), & (g \text{ menyusut}) \\ 0 & \text{untuk } P_i < a \text{ atau } P_i > d, & f(P_i) = g(P_i) = 0 \end{cases} \quad (2)$$



RAJAH 1. Struktur nombor kabur dan set sokongannya

Jadi, $\{\tilde{P}_i\}_{i=0}^n = \{\tilde{P}_0 = \langle \tilde{P}_0^-, \tilde{P}_0^+ \rangle, \tilde{P}_1 = \langle \tilde{P}_1^-, \tilde{P}_1^+ \rangle, \dots, \tilde{P}_n = \langle \tilde{P}_n^-, \tilde{P}_n^+ \rangle\}$ adalah bentuk selang rangkap tiga set data kabur yang akan digunakan dalam kajian kertas ini. Jika $\alpha_i \in (0,1]$ maka $\tilde{P}_{\alpha_i} = \{\langle \tilde{P}_{\alpha_i}^-, P_{\alpha_i}, \tilde{P}_{\alpha_i}^+ \rangle\}$ dalam $\psi(\tilde{P}_{\alpha_i})$. Jika $f(P_i) = g(P_i)$, maka $\varepsilon = \delta$, dan jika $f(P_i) \neq g(P_i)$, maka $\varepsilon \neq \delta$.

Set kabur \tilde{P} dalam suatu ruang S dikatakan *set titik kawalan kabur* jika untuk setiap set aras- α yang dipilih, wujud selang bertitik iaitu $P = \langle P_i^-, P_i, P_i^+ \rangle$ dalam S dengan setiap P_i merupakan titik rangup dan $\mu_p: S \rightarrow [0,1]$ fungsi keahlian yang ditakrif sebagai $\mu_p(P_i) = 1$,

$$\mu_p(P_i^-) = \begin{cases} 0 & \text{jika } P_i^- \notin S \\ c \in (0,1) & \text{jika } P_i^- \in S \\ 1 & \text{jika } P_i^- \in S \end{cases}$$

dan

$$\mu_p(P_i^+) = \begin{cases} 0 & \text{jika } P_i^+ \notin S \\ k \in (0,1) & \text{jika } P_i^+ \in S \\ 1 & \text{jika } P_i^+ \in S \end{cases}$$

dengan $\mu_p(P_i^-)$ dan $\mu_p(P_i^+)$ masing-masing nilai gred keahlian-kiri dan gred keahlian-kanan dan secara amnya ditulis sebagai

$$\tilde{P} = \{\tilde{P}_i : i = 0, 1, 2, \dots, n\} \tag{3}$$

untuk setiap i , $\tilde{P}_i = \langle \tilde{P}_i^-, P_i, \tilde{P}_i^+ \rangle$ dengan $\tilde{P}_i^-, P_i, \tilde{P}_i^+$ masing-masing titik kawalan kabur-kiri, titik kawalan rangup dan titik kawalan kabur-kanan.

Misalkan P adalah set dalam ruang S bermatra dua, maka \tilde{P} dikatakan *set koordinat titik kawalan kabur* dalam S jika untuk setiap set aras- α yang dipilih wujud $P = \langle P_i^-, P_i, P_i^+ \rangle$ dengan $P_i = (x_i, y_i)$, $P_i^- = (x_i, y_i)^-$ dan $P_i^+ = (x_i, y_i)^+$ dan fungsi keahlian $\mu_p: S \times S \rightarrow [0,1]$ dengan gred keahlian yang ditakrif oleh $\mu_p(x_i, y_i) = 1$,

$$\mu_p(x_i, y_i)^- = \begin{cases} 0 & \text{jika } (x_i, y_i) \notin S \times S \\ c \in (0,1) & \text{jika } (x_i, y_i) \in S \times S \\ 1 & \text{jika } (x_i, y_i) \in S \times S \end{cases}$$

dan

$$\mu_p(x_i, y_i)^+ = \begin{cases} 0 & \text{jika } (x_i, y_i) \notin S \times S \\ c \in (0,1) & \text{jika } (x_i, y_i) \in S \times S \\ 1 & \text{jika } (x_i, y_i) \in S \times S \end{cases}$$

Kita menulis set koordinat titik kawalan kabur sebagai

$$\tilde{P} = \{\tilde{P}_i = (x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, n\} \tag{4}$$

dengan $\tilde{P}_i = \langle \tilde{P}_i^-, P_i, \tilde{P}_i^+ \rangle$ yang mengandungi \tilde{P}_i^-, P_i dan \tilde{P}_i^+ masing-masing koordinat titik kawalan kabur-kiri, koordinat titik kawalan rangup dan koordinat titik kawalan kabur-kanan.

Setiap titik kawalan $P_i = (x_i, y_i) \in P \times P$ yang ditakrif oleh fungsi keahlian berbentuk linear dan normal yang mempunyai selang sokongan set kabur aras- α , gambarannya seperti yang ditunjukkan pada Rajah 2.

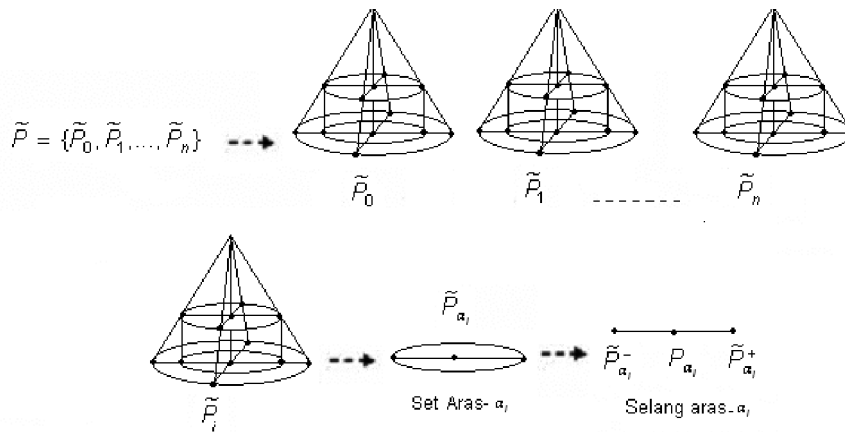
Misalkan \tilde{P} adalah set titik kawalan kabur yang ditakrif melalui (4). Set \tilde{P} dinamakan *set titik kawalan penyahkaburan* bagi \tilde{P} jika untuk setiap $\tilde{P}_i \in \tilde{P}$,

$$\tilde{P} = \{\tilde{P}_i\} \text{ untuk } i = 0, 1, \dots, n. \tag{5}$$

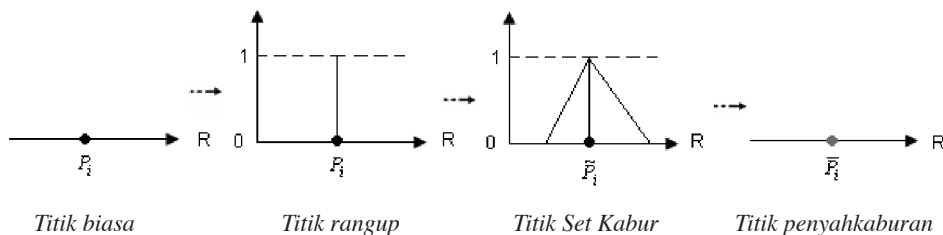
dengan setiap $\tilde{P}_i = \sum_{i=0}^{n+m+3} \langle \tilde{P}_i^-, P_i, \tilde{P}_i^+ \rangle / n+m+3$ (Rajah 3).

MODEL LENGKUNG SPLIN-B KABUR DAN MODEL PENYAHKABURAN KUBIK

Seperti yang tersedia maklum, model lengkung dan permukaan Bezier kabur dan penyahkaburan yang telah dibincang oleh Abd. Fatah et al. (2004) mempunyai



RAJAH 2. Titik kawalan kabur dan selang $\langle \tilde{P}_i^-, P_i, \tilde{P}_i^+ \rangle$ pada suatu set aras- α dalam selang $(0,1]$



RAJAH 3. Pendekatan pengkaburan dan penyahkaburan titik kawalan dalam pemodelan geometri menggunakan teori set kabur

beberapa kelemahan tertentu. Terutamanya, hubungan yang terlalu ketat yang wujud antara titik kawalan kabur dengan peringkat bagi model Bezier kabur, sifat ini tidak diinginkan pereka dalam mereka bentuk model dengan jumlah titik kawalan yang banyak. Bagi mengatasi masalah sedemikian, dalam bahagian ini diperkenalkan model lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan yang bebas daripada masalah itu. Malah, model splin-B kabur ini lebih bersifat setempat dan boleh mengawal suatu perubahan pada lengkung atau permukaan secara setempat dan tentu sekali model ini akan mempunyai kelebihan tambahan dan lebih sesuai digunakan bagi masalah titik data yang banyak dan bersifat kompleks.

Takrif 4: Misalkan \tilde{P} adalah $(n+1)$ titik kawalan kabur. $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ adalah $(m+1)$ titik knot rangup yang tak menyusut dengan nilai $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$. Fungsi berparameter $\tilde{S}pa(t)$ dinamakan *splin-B kabur* berperingkat $k = (m + 1) - (n + 1)$ dan berdarjah $d = k - 1$ yang ditakrif sebagai:

$$\tilde{S}pa(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{P}_i N_{i,k}(t), \quad t \in [0,1], \quad (6)$$

dengan $\tilde{P}_i N_{i,k}(t) = \langle \tilde{P}_i^-, N_{i,k}(t), P_i, \tilde{P}_i^+ \rangle$ adalah splin-B rangup dan $N_{i,k}(t)$ adalah fungsi asas rangup bagi splin-B kabur.

Titik kawalan kabur \tilde{P}_i ditakrif melalui nombor kabur yang normal. Oleh itu, untuk setiap nilai potongan- α , wujud set kabur aras- α , $\tilde{P}_{i\alpha}$ dengan selang sokongannya adalah tertakrif di atas garis nyata R . Dengan itu ciri-ciri yang berikut adalah benar.

1. Jika $\alpha \geq \beta$, maka $\tilde{P}_{i\alpha} \subseteq \tilde{P}_{i\beta}$ untuk setiap $\alpha, \beta \in [0,1]$.
2. Jika $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \tilde{P}_{i\alpha} = \tilde{P}_i$, maka $\langle \tilde{P}_{i\alpha}^-, P_i, \tilde{P}_{i\alpha}^+ \rangle \subseteq \langle \tilde{P}_{i\beta}^-, P_i, \tilde{P}_{i\beta}^+ \rangle$ untuk setiap $\alpha \geq \beta$.
3. Jika selang $\langle \tilde{P}_{i\alpha}^-, \tilde{P}_i, \tilde{P}_{i\alpha}^+ \rangle$ menghampiri sifar, maka lengkung splin-B kabur $\tilde{S}pa(t)$ akan menghampiri lengkung splin-B rangup.

Jika τ adalah knot yang panjangnya $n + k = d + n + 1$, maka lengkung splin-B kabur yang dijana adalah berperingkat k . Oleh itu, cebisan polinomial yang membentuk lengkung kabur adalah berdarjah kurang daripada k . Nilai $\tilde{S}pa(t)$ pada sebarang nilai t dalam selang $[t_i, t_{i+1}]$ adalah suatu gabungan cembung bagi n titik kawalan

kabur $\{\tilde{P}_{i-n+1}, \dots, \tilde{P}_i\}$. Splin-B kabur dengan $t_i \leq t_{i+1} \leq \dots \leq t_{i+k}$ adalah positif pada selang $[t_i, t_{i+k}]$ dan negatif di luar selang tersebut. Ianya tertakrif pada suatu julat $[a, b] = [t_d, t_{m-d}]$ jika τ adalah knot berulang. Jika $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ dengan t_i adalah nilainya sama, maka splin-B kabur yang terhasil adalah dinamakan *splin-B kabur knot seragam* dan sebaliknya *splin-B knot tak seragam*. Pengrekuensi splin-B kabur diperluas daripada splin-B rangup. Jika \tilde{P}_i adalah $(n+1)$ titik kawalan kabur dan $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ adalah $(m+1)$ nilai knot rangup, maka lengkung splin-B rangup berdarjah $d = k - 1$ dalam domain ialah cebisan polinomial berperingkat k . Pengrekursinya adalah seperti langkah-langkah yang berikut:

1. Takrifkan $\tilde{P}_i^{(0)} = \tilde{P}_i$
2. Untuk $t_i \geq t_d$ yang diberi, cari J sehingga $t_j \leq t_i \leq t_{j+1}$.
3. Untuk $p = 1, 2, \dots, d$ dan $i = J-d+p, \dots, J$, dan biarkan
$$\tilde{P}_i^{(p)} = \frac{(t-t_i)}{(t_{i+d-(p-1)}-t_i)} \tilde{P}_i^{(p-1)} + \frac{t_{i+d-(p-1)}-t}{t_{i+d-(p-1)}-t_i} \tilde{P}_{(i)}^{(p-1)}.$$
4. Maka $\tilde{S}pa(t) = \tilde{P}_i^{(d)}$.

Bagi menghasilkan satu lengkung splin-B kabur berperingkat k dan berdarjah n yang selanjar secara C^{k-2} , maklumat yang berikut adalah diperlukan.

1. $\tilde{P}_i, (n + 1)$ titik kawalan kabur.
2. Penentuan nilai knot iaitu $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_{m=d+n+1}\}$ dengan berdasarkan $(n + 1)$ titik kawalan kabur yang diberi yang panjangnya ialah $k + (n + 1) = m + 1$ dan $(m + 1) - (n + 1) = k$ adalah peringkat bagi lengkung.
3. Suaikan dengan (6) bagi penjanaan lengkung splin-B kabur berperingkat $(n + 1)$.

CONTOH BERANGKA

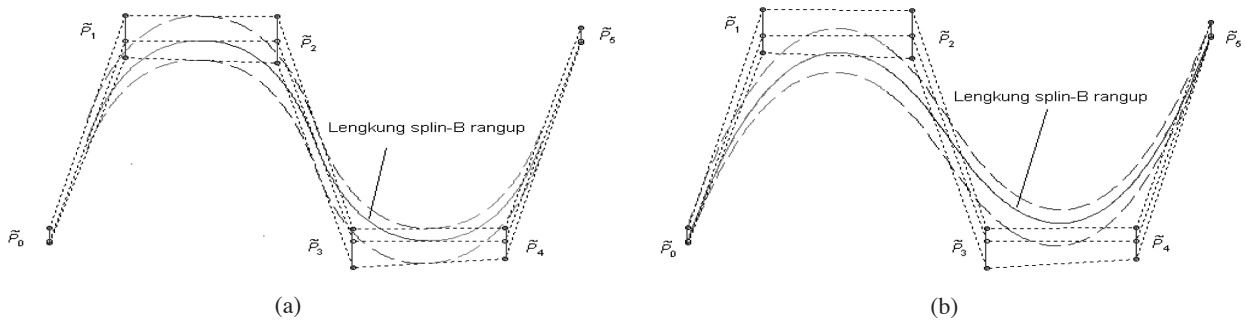
Misalkan $(n+1)=6$ titik kawalan kabur $\tilde{P} = \{\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4, \tilde{P}_5\}$. Lengkung splin-B kuadratik knot seragam berperingkat $k = 3$ dan berdarjah $n = 2$ yang selanjar $C^{k-2} = C^1$ dengan knot $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ yang panjangnya $m = (n + 1) + k = 8$. Jadi kita mempunyai $(n + 1) - d = 4$ segmen lengkung kabur $\{\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2\}, \{\tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{S}_4\}, \{\tilde{S}_4, \tilde{S}_5, \tilde{S}_6\}$ dan $\{\tilde{S}_6, \tilde{S}_7, \tilde{S}_8\}$ masing-masing tertakrif dalam poligon kawalan kabur $\{\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2\}, \{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3\}, \{\tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4\}$ dan $\{\tilde{P}_3, \tilde{P}_4, \tilde{P}_5\}$. Untuk lengkung splin-B kabur kubik, knot $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_9\}$ bertambah satu nilai yang selanjar C^1 dan mempunyai

tiga segmen lengkung iaitu, $\{\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3\}$, $\{\tilde{s}_3, \tilde{s}_4, \tilde{s}_5, \tilde{s}_6\}$ dan $\{\tilde{s}_6, \tilde{s}_7, \tilde{s}_8, \tilde{s}_9\}$ masing-masing dalam poligon kawalan $\{\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3\}$, $\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4\}$ dan $\{\tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, \tilde{p}_5\}$. Katakan kita memilih beza knot $(t_{i+1} - t_i)$ yang nilainya sama, iaitu knot seragam $\tau = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8\}$ yang sama dengan $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dengan selang yang digunakan ialah $[3,4]$, $[4,5]$, $[5,6]$, dan $[6,7]$. Maka dengan rumus splin-B kabur (6), lengkung kabur kuadratik Rajah 4 (a) dapat kita hasilkan. Supaya lengkung splin-B kabur menginterpolasi di kedua-dua titik hujung \tilde{P}_0 dan \tilde{P}_5 , kita perlu samakan $t_0 = t_1 = t_2$ dan $t_6 = t_7 = t_8$, $\tau = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4\}$ (knot kegandaan tiga dalaman seragam dan boleh juga tak seragam), iaitu kita mengulangi nilai knot

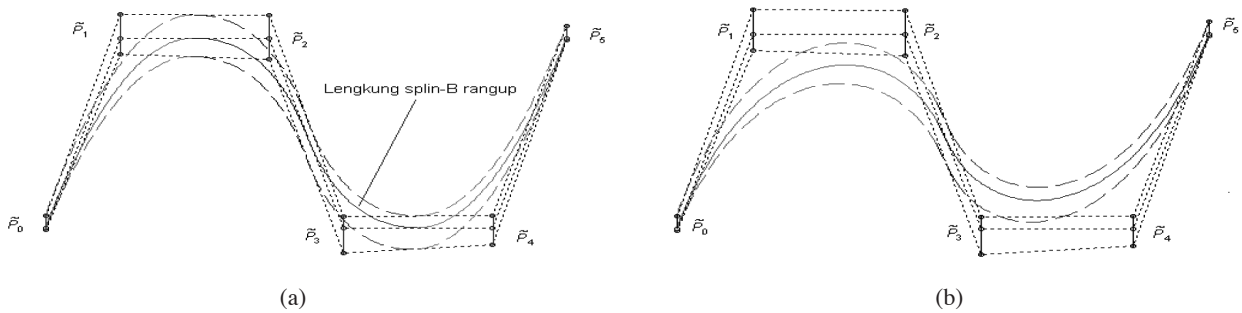
tepi sebanyak tiga kali dan lengkung pada Rajah 4 (b) sebagai nati-jahnya.

Lengkung splin-B kabur kubik yang ditakrif dengan 6 titik kawalan kabur memerlukan 10 nilai knot $\tau = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9\}$ yang seragam atau tak seragam. Lengkung yang terhasil seperti dalam Rajah 5.

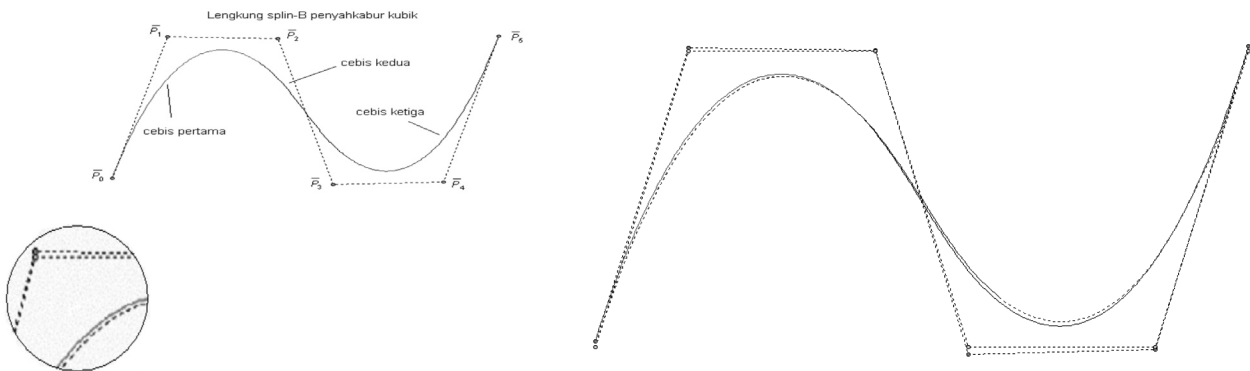
Bagi memperoleh satu model lengkung splin-B yang bersifat kepastian, titik kawalan yang kabur perlulah dinyahkaburan supaya model yang terbina akan menghasilkan lengkung penyahkaburan berbentuk tunggal yang berbeza dengan lengkung rangup. Oleh yang demikian, seksyen ini akan memperkenalkan model dikenali sebagai *model splin-B penyahkaburan* atau *model splin-B ketakpastian tunggal* (Rajah 6, 7, 8 dan 9).



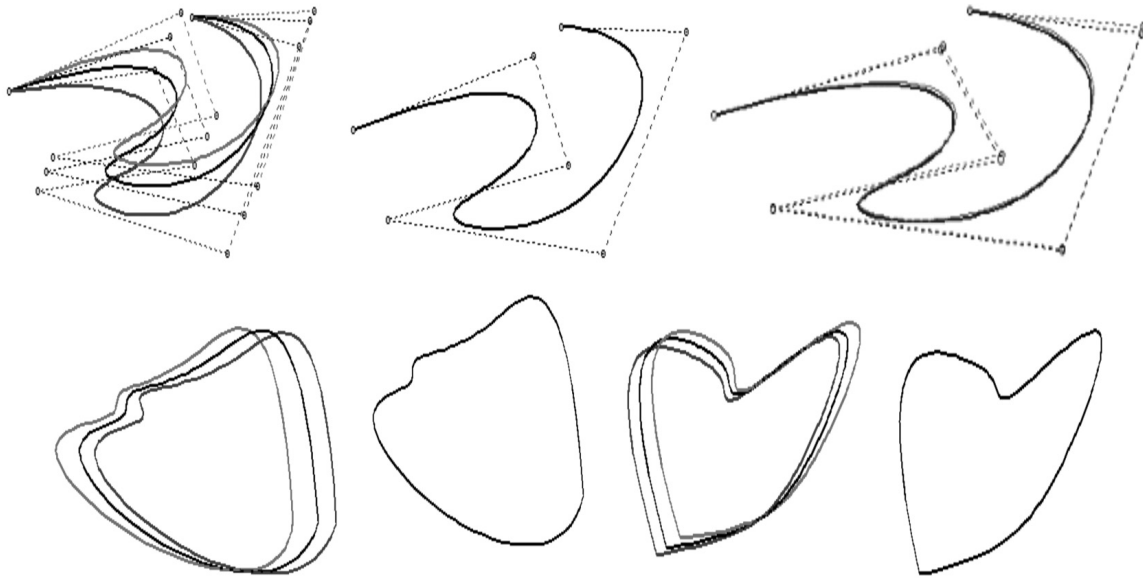
RAJAH 4. Lengkung splin-B kabur kuadratik dengan nilai knot seragam. (a) lengkung tak menginterpolasi kedua titik hujung dan (b) lengkung menginterpolasi kedua titik hujung



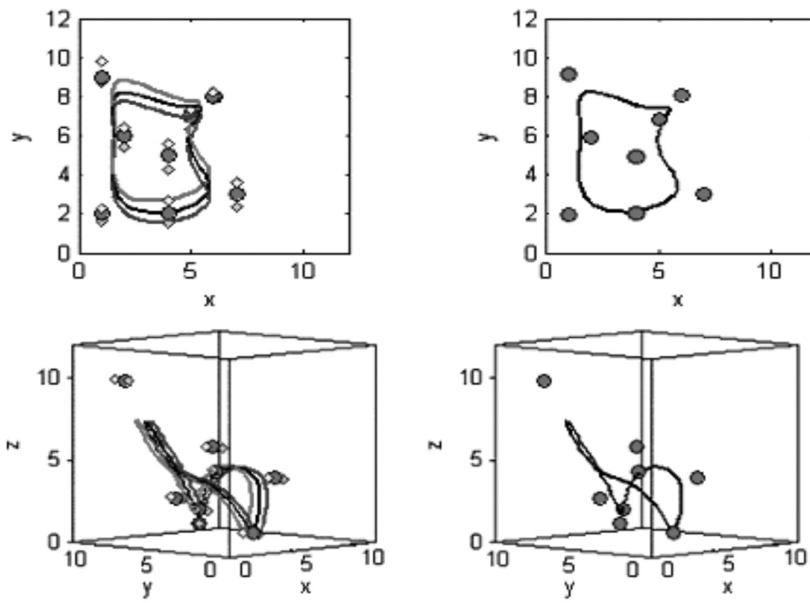
RAJAH 5. Lengkung splin-B kabur kubik nilai knot (a) knot seragam dan (b) knot tak seragam



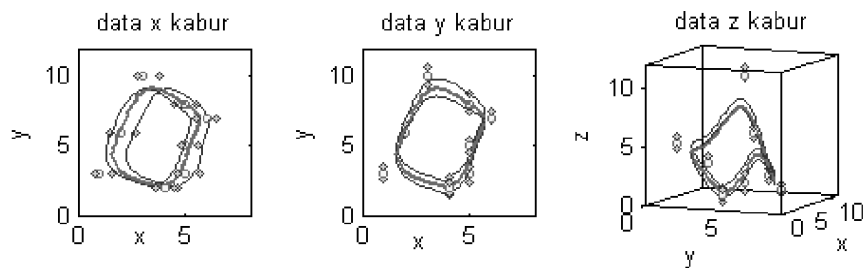
RAJAH 6. Lengkung splin-B penyahkaburan dan perbandingannya dengan lengkung splin-B yang rangup



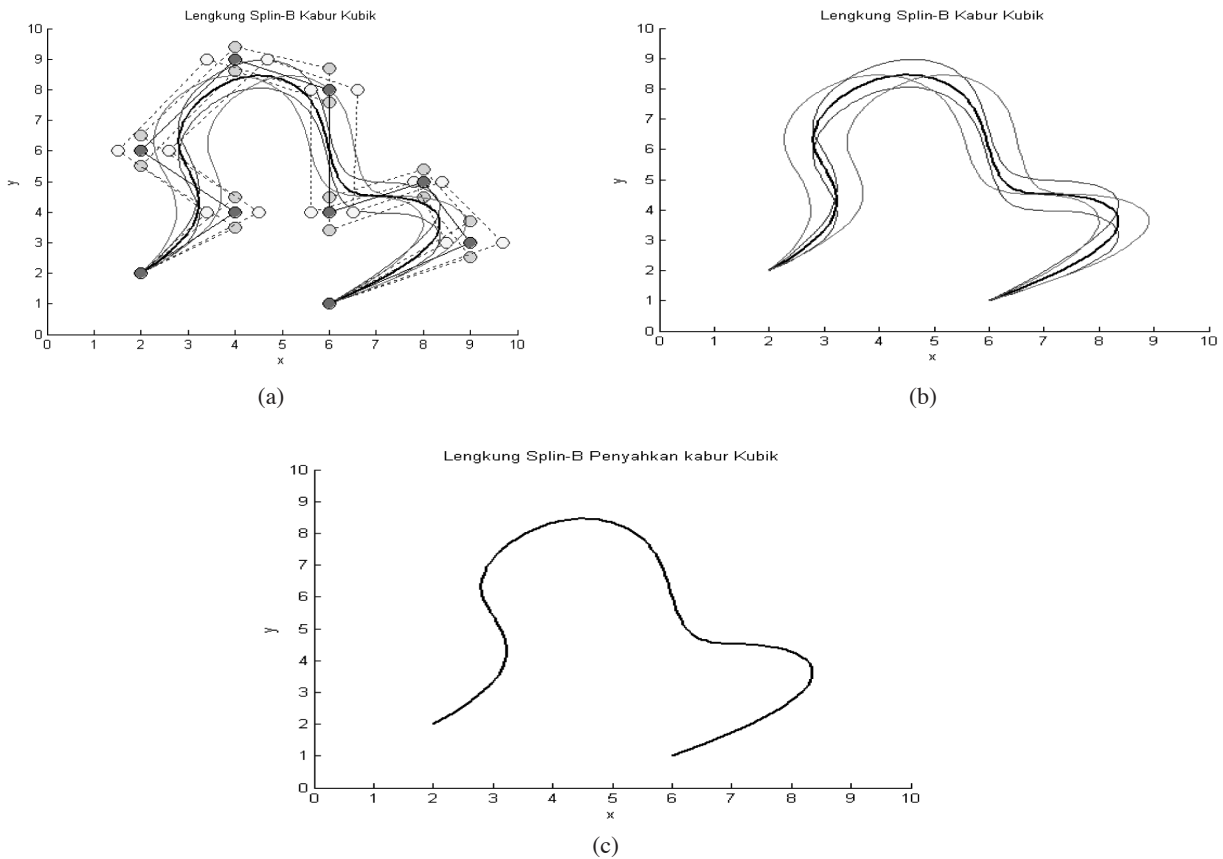
RAJAH 7. Lengkung splin-B kabur dan penyahkaburan kubik terbuka dan tertutup



RAJAH 8. Lengkung splin-B kabur dan penyahkaburan kubik tertutup dalam bentuk 2D dan 3D



RAJAH 9. Lengkung splin-B kabur dihasil melalui penyesuaian data x, data y dan data z adalah kabur



RAJAH 10. Lengkung splin-B kabur dengan titik data x dan y kabur serentak dan lengkung splin-B penyahkaburan

Takrif 5: Misalkan \bar{P} adalah $(n+1)$ titik kawalan penyahkaburan dan $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ adalah $(m+1)$ jujukan nilai knot rangup tak menyusut $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$. Maka *lengkung splin-B penyahkaburan* ditakrif oleh fungsi berparameter:

$$\tilde{S}pa(t) = \sum_{i=0}^n P_{i,k}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (5)$$

dengan adalah fungsi asas splin-B kabur untuk titik kawalan kabur yang ke- i dengan k sebagai peringkat bagi lengkung. Hasil penyesuaiannya ditunjukkan dalam Rajah 6.

MASALAH PENGKABURAN TITIK DATA

Oleh sebab setiap titik kawalan tak semestinya titik data, akan tetapi setiap titik data boleh dianggap sebagai titik kawalan. Andai kata titik data adalah titik kawalan, maka pengkaburan titik data tersebut boleh dilakukan dengan beberapa cara mengikut persoalan yang akan dibincangkan. Terdapat dua kaedah pengkaburan titik data yang boleh kita lakukan iaitu (a) pengkaburan mengikut paksi dan (b) pengkaburan mengikut pepenjuru data (Abd. Fatah et al. 2007). Hasil penyesuaiannya ditunjukkan dalam Rajah 9, 10, 11 dan 12.

Misalkan $P_i = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ data rangup dengan masalah ketakpastian pada paksi. Pengkaburan mengikut paksinya boleh dilakukan seperti berikut:

1. Pengkaburan terhadap paksi x dengan nilai y tetap (rangup) diberi oleh:

$$\begin{aligned} \tilde{P}^x &= \{\tilde{P}_0^x, \tilde{P}_1^x, \dots, \tilde{P}_n^x\} \\ &= \{ \langle (\tilde{x}_0^-, y_0), (x_0, y_0), (x_0^+, y_0) \rangle, \\ &\quad \langle (x_1, \tilde{y}_1^-), (x_1, y_1), (x_1^+, y_1) \rangle, \dots, \\ &\quad \langle (\tilde{x}_n^-, y_n), (x_n, y_n), (x_n^+, y_n) \rangle \} \end{aligned} \quad (6)$$

2. Pengkaburan terhadap paksi y dengan nilai x tetap (rangup) diberi oleh:

$$\begin{aligned} \tilde{P}^y &= \{\tilde{P}_0^y, \tilde{P}_1^y, \dots, \tilde{P}_n^y\} \\ &= \{ \langle (x_0, \tilde{y}_0^-), (x_0, y_0), (x_0, \tilde{y}_0^+) \rangle, \\ &\quad \langle (x_1, \tilde{y}_1^-), (x_1, y_1), (x_1, \tilde{y}_1^+) \rangle, \dots, \\ &\quad \langle (x_n, \tilde{y}_n^-), (x_n, y_n), (x_n, \tilde{y}_n^+) \rangle \} \end{aligned} \quad (7)$$

3. Pengkaburan terhadap komponen z dengan nilai (x,y) tetap diberi oleh:

$$\begin{aligned} \tilde{P}^z &= \{ \tilde{P}_0^z, \tilde{P}_1^z, \dots, \tilde{P}_n^z \} \\ &= \{ \langle (x_0, y_0, \tilde{z}_0^-), (x_0, y_0, z_0), (x_0, y_0, \tilde{z}_0^+) \rangle, \\ &\quad \langle (x_1, y_1, \tilde{z}_1^-), (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, \tilde{z}_1^+) \rangle, \dots, \\ &\quad \langle (x_n, y_n, \tilde{z}_n^-), (x_n, y_n, z_n), (x_n, y_n, \tilde{z}_n^+) \rangle \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Posisi ketakpastian data yang diwakili oleh titik kabur mempunyai titik kejiranan yang kabur. Oleh yang demikian, teknik pengkaburan titik data mengikut pepenju ru perlu diperjelaskan. Berikut dibincangkan pengkaburan titik kawalan mengikut pepenju ru, kiri ke kanan dan kanan ke kiri.

1. Pengkaburan komponen (x,y), titik data kabur berpepenju ru kiri-kanan ialah:

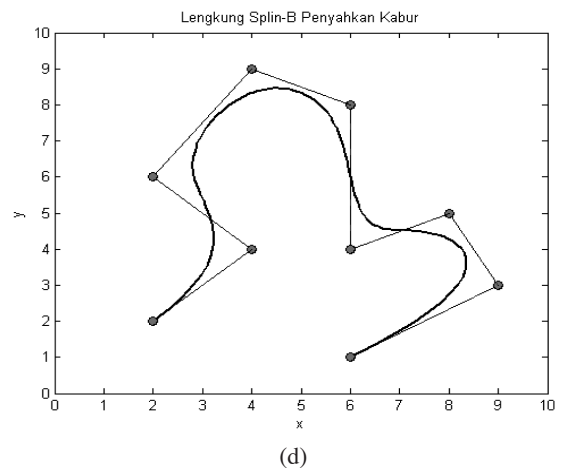
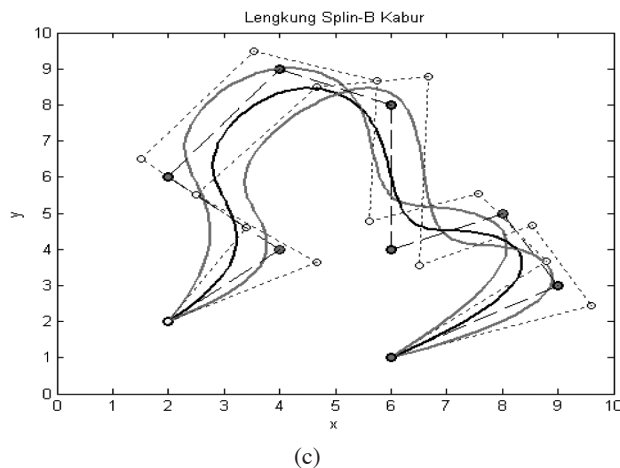
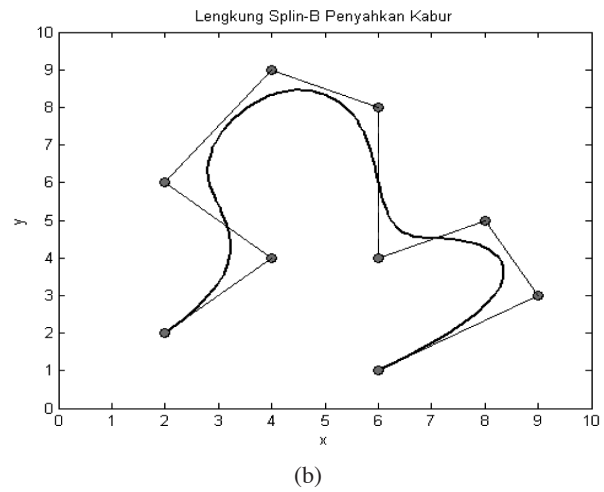
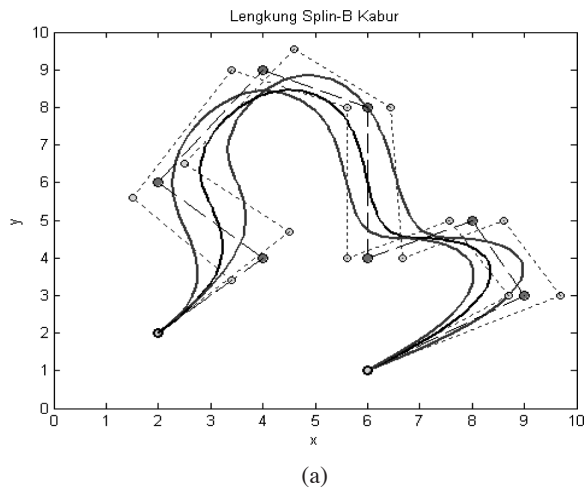
$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(x,y)\pm} &= \{ \tilde{P}_0^{(x,y)\pm}, P_1^{(x,y)\pm}, \dots, P_n^{(x,y)\pm} \} \\ &= \{ \langle (\tilde{x}_0^-, \tilde{y}_0^-), (x_0, y_0) (\tilde{x}_0^+, \tilde{y}_0^+) \rangle, \\ &\quad \langle (\tilde{x}_1^-, \tilde{y}_1^-), (x_1, y_1) (\tilde{x}_1^+, \tilde{y}_1^+) \rangle, \dots, \\ &\quad \langle (\tilde{x}_n^-, \tilde{y}_n^-), (x_n, y_n) (\tilde{x}_n^+, \tilde{y}_n^+) \rangle \}. \end{aligned} \quad (9)$$

2. Pengkaburan komponen (x,y), titik data kabur berpepenju ru kanan-kiri diberi sebagai:

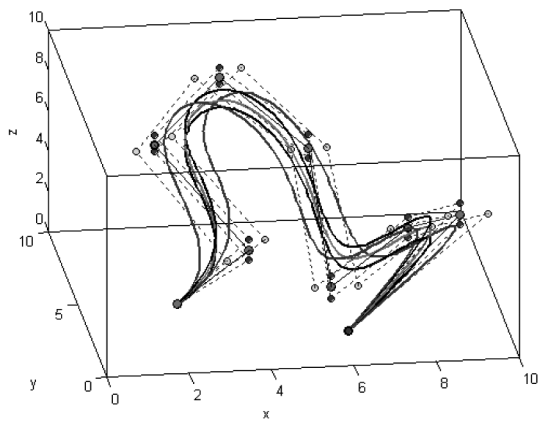
$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(x,y)\mp} &= \{ \tilde{P}_0^{(x,y)\mp}, P_1^{(x,y)\mp}, \dots, P_n^{(x,y)\mp} \} \\ &= \{ \langle (\tilde{x}_0^+, \tilde{y}_0^+), (x_0, y_0) (\tilde{x}_0^-, \tilde{y}_0^-) \rangle, \\ &\quad \langle (\tilde{x}_1^+, \tilde{y}_1^+), (x_1, y_1) (\tilde{x}_1^-, \tilde{y}_1^-) \rangle, \dots, \\ &\quad \langle (\tilde{x}_n^+, \tilde{y}_n^+), (x_n, y_n) (\tilde{x}_n^-, \tilde{y}_n^-) \rangle \}. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Pengkaburan komponen (x,y,z) berpepenju ru kiri-kanan data kabur menjadi:

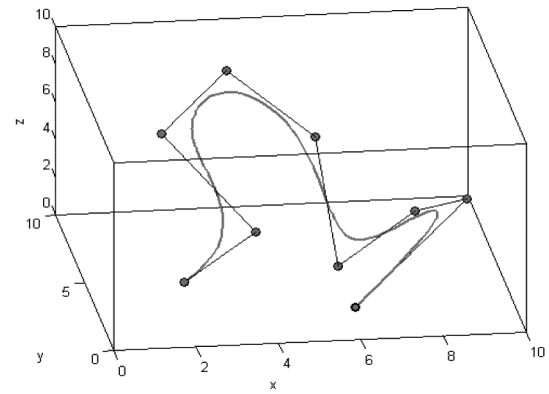
$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(x,y,z)\pm} &= \{ \tilde{P}_0^{(x,y,z)\pm}, P_1^{(x,y,z)\pm}, \dots, P_n^{(x,y,z)\pm} \} \\ &= \{ \langle (\tilde{x}_0^-, \tilde{y}_0^-, z_0^-), (x_0, y_0, z_0) (\tilde{x}_0^+, \tilde{y}_0^+, z_0^+) \rangle, \\ &\quad \langle (\tilde{x}_1^-, \tilde{y}_1^-, z_1^-), (x_1, y_1, z_1) (\tilde{x}_1^+, \tilde{y}_1^+, z_1^+) \rangle, \dots, \\ &\quad \langle (\tilde{x}_n^-, \tilde{y}_n^-, z_n^-), (x_n, y_n, z_n) (\tilde{x}_n^+, \tilde{y}_n^+, z_n^+) \rangle \}. \end{aligned} \quad (11)$$



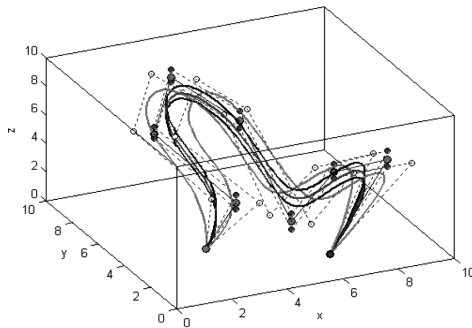
RAJAH 11. Lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan kubik titik data berkomponen kabur



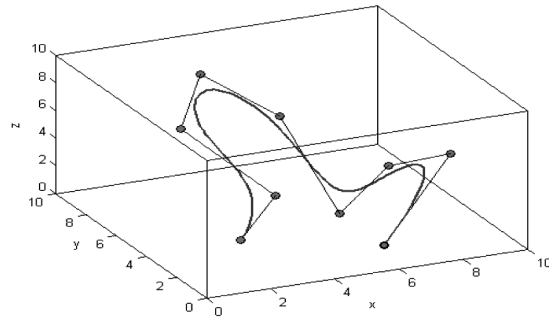
(a)



(b)



(c)



(d)

RAJAH 12. Lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan titik data berpepenjuru kabur dalam bentuk 3D

4. Pengkaburan komponen (x,y,z) berpepenjuru kanan-kiri data kabur menjadi:

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}_+ &= \left\{ \tilde{P}_0^{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}_+, P_1^{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}_+, \dots, P_n^{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}_+ \right\} \\ &= \left\{ \langle (\tilde{x}_0^+, \tilde{y}_0^+, \tilde{z}_0^+), (x_0, y_0, z_0) (\tilde{x}_0^-, \tilde{y}_0^+, \tilde{z}_0^+) \rangle, \right. \\ &\quad \langle (\tilde{x}_1^+, \tilde{y}_1^+, \tilde{z}_1^+), (x_1, y_1, z_1) (\tilde{x}_1^-, \tilde{y}_1^+, \tilde{z}_1^+) \rangle, \dots, \\ &\quad \left. \langle (\tilde{x}_n^+, \tilde{y}_n^+, \tilde{z}_n^+), (x_n, y_n, z_n) (\tilde{x}_n^-, \tilde{y}_n^+, \tilde{z}_n^+) \rangle \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

yang terdiri daripada komponen titik data rangup, titik data kiri dan kanan yang kabur lengkap.

MODEL SPLIN-B DATA BERKOMPONEN KABUR

1. Jika $\tilde{P}^{(\tilde{x},\tilde{y})}_+$ dan $\bar{P}^{(\bar{x},\bar{y})}_+$ adalah masing-masing titik data berpepenjuru kiri-kanan kabur dan data penyahkaburan, maka model lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan masing-masing ditakrif sebagai:

$$\begin{aligned} \tilde{S}pa(t) &= \sum_{i=0}^n \tilde{P}_i^{(\tilde{x},\tilde{y})}_+ N_{i,n}(t) \\ \text{dan } \bar{S}pa(t) &= \sum_{i=0}^n \bar{P}_i^{(\bar{x},\bar{y})}_+ N_{i,n}(t). \quad (13) \end{aligned}$$

2. Jika $\tilde{P}_i^{(\tilde{x},\tilde{y})}_+$ dan $\bar{P}_i^{(\bar{x},\bar{y})}_+$ masing-masing adalah data berpepenjuru kanan-kiri kabur dan penyahkabur, maka model splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan ditakrif sebagai:

$$\begin{aligned} \tilde{S}pa(t) &= \sum_{i=0}^n \tilde{P}_i^{(\tilde{x},\tilde{y})}_+ N_{i,n}(t) \\ \text{dan } \bar{S}pa(t) &= \sum_{i=0}^n \bar{P}_i^{(\bar{x},\bar{y})}_+ N_{i,n}(t). \quad (14) \end{aligned}$$

3. Jika $\tilde{P}_i^{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}_+$ dan $\bar{P}_i^{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}_+$ adalah titik data kabur dan penyahkaburan dalam bentuk 3D, maka model splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan ditakrif oleh

$$\begin{aligned} \tilde{S}pa(t) &= \sum_{i=0}^n \tilde{P}_i^{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}_+ N_{i,n}(t) \\ \text{dan } \bar{B}(t) &= \sum_{i=0}^n \bar{P}_i^{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}_+ N_{i,4}(t). \quad (15) \end{aligned}$$

4. Jika $\tilde{P}_i^{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}_+$ dan $\bar{P}_i^{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}_+$ masing-masing titik data berpepenjuru kanan-kiri kabur dan penyahkaburan dalam bentuk 3D, maka lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan ditakrif sebagai

$$\begin{aligned} \tilde{S}pa(t) &= \sum_{i=0}^n \tilde{P}_i^{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}_+ N_{i,n}(t) \\ \text{dan } \bar{B}(t) &= \sum_{i=0}^n \bar{P}_i^{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}_+ N_{i,4}(t). \quad (16) \end{aligned}$$

KESIMPULAN

Dengan konsep nombor kabur normal, takrif titik kawalan kabur dan penyahkaburan diperkenalkan. Dengan itu, model berserta lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan kubik telah dibangunkan. Kaedah pengkaburan titik data yang mempunyai ciri ketakpastiaan, bersifat ambiguiti dan kekelaman dibincangkan. Model dan contoh-contoh penyelesaian bagi data jenis yang dibincang telah diuji dan ditunjukkan melalui beberapa gambarajah dalam bentuk 2D dan 3D. Model lengkung splin-B kabur ini dapat diperluaskan kepada model permukaan splin-B yang selanjur dan licin.

PENGHARGAAN

Penulis merakamkan setinggi-tinggi penghargaan dan terima kasih kepada Kementerian Pelajaran Tinggi Malaysia bagi bantuan geran penyelidikan FRGS dan Pusat Pengurusan Penyelidikan UMT dalam membiayai projek ini.

RUJUKAN

- Abd. Fatah Wahab, Ali, J.M., Majid, A.A. & Tap, A.O.M. 2004. Fuzzy set in geometric modelling. *International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization*. CGIV 2004, 26-29 July, Penang Malaysia. IEEE Computer Society.
- Abd. Fatah Wahab, Ali, J.M., Tap, A.O.M. & Majid, A.A. 2005. Geometric modeling of uncertain region. *LUMS International of Mathematical Modeling and IT*. 5-7 November, Lahore University of Management Sciences (LUMS).
- Abd. Fatah Wahab, Ali, J.M., Tap, A.O.M. & Majid, A.A. 2007. Penyesuaian data ketakpastian melalui splin kabur. *Prosiding, Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke XV*. 4-7 Jun UiTM, PPMM & PERSAMA.
- Anile, A.M., Falcidieno, B., Gallo, G., Spagnuolo, M. & Spinello, S. 2000. Modelling uncertain data with fuzzy B-splines, *Fuzzy Sets System* 113: 397-410.
- Anile, A.M., Deodato, S. & Privitera, G. 1995. Implementing fuzzy arithmetic *Fuzzy Sets System* 72: 239-250.
- Castro, J.L. 1995 Fuzzy logic controlers are universal approximators. *IEEE Trans. System Man. and Cybernetics* 25(4): 629-635.
- Gallo, G. & Spinello, S. 2000. Fuzzy B-spline: A surface model encapsulating uncertainty. *Graphical Models* 62: 40-55.
- Jaccas, J., Monreal, A. & Recasens, J. 1997. A model for CAGD using fuzzy logic. *International Journal of Approximate Reasoning* 16: 289-308.
- Jaccas, J. & Recasens, J. 1993. Fuzzy numbers and equality relations. *Proceedings FUZZ'IEEE-93 Congress*. San Francisco, CA.
- Jamaludin & Abd. Fatah Wahab. 2005. Kecekapan matematik dalam reka bentuk untuk keperluan industri. *Prosiding Seminar Matematik dan Masyarakat*, 26-27 Februari anjuran Jabatan Matematik, FST, KUSTEM di Gem Beach Resort Kuala Terengganu, Malaysia.
- Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control* 8(3): 338-353.
- Abd. Fatah Wahab*
Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi
Universiti Malaysia Terengganu
21030 Kuala Terengganu, Malaysia
- Jamaludin Md. Ali & Ahmad Abd. Majid
Sekolah Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia
11800 USM Pulau Pinang, Malaysia
- Abu Osman Md. Tap
Jabatan IT, Universiti Islam Antarabangsa Malaysia
53100 Gombak, Selangor, Malaysia
- *Pengarang untuk surat-menyurat; email: fatah@umt.edu.my
- Diserahkan: 15 Mei 2009
Diterima: 29 Disember 2009